Midtoets Lineaire Algebra 1, 16 december 2010

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de lineaire vergelijking $Ax = b$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 4 \\ 1 & 2 & k+2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hierin is $k \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarden van k heeft de vergelijking een unieke oplossing?

b. Voor welke waarden van k is de vergelijking strijdig?

c. Voor welke waarden van k heeft de vergelijking oneindig veel oplossingen?

2. Gegeven is de lineaire vergelijking $Ax = b$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de leidende en de vrije variabelen.

b. Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking.

3. a. Stel dat A en B inverteerbare matrices zijn, en X een matrix zodat $AXB = A + B$. Bepaal X.

b. Stel A en B vierkante matrices zodanig dat $AB = BA$. Toon aan dat $(AB)^\top = A^\top B^\top$.

c. Toon aan: als A inverteerbaar is, dan is ook $A^\top$ inverteerbaar, en $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

4. Laat A een $n \times n$ matrix, B een $n \times k$ matrix en C een $k \times k$ matrix zijn. 0 is de nulmatrix, I is de identiteitsmatrix. We bekijken nu de matrix die wordt gevormd door deze blokken:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

a. Stel dat A niet-singulier is. Toon aan dat er een matrix E bestaat zodat

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & E \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

b. Bewijs dat

$$\det(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}) = \det(C)$$

c. Bewijs dat

$$\det(\begin{pmatrix} I & E \\ 0 & I \end{pmatrix}) = 1$$

d. Bewijs dat

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}) = \det(A)\det(C)$$

5. Gegeven zijn de twee punten $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. We bekijken nu de verzameling van alle punten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan de vergelijking

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}) = 0.$$

Toon aan dat deze verzameling een lijn vormt in $\mathbb{R}^2$ die door de punten $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ loopt.

2

6. Laat $\mathbb{C}$ de verzameling van alle complexe getallen zijn, dus de getallen van de vorm $z = a + bi$, met a en b reeël en i de imaginaire eenheid. Hierop is een optelling gedefinieerd door

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i,$$

en een vermenigvuldiging met reële getallen door

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi.$$

Toon aan dat $\mathbb{C}$ met deze twee operaties een vectorruimte is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 10
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 25
Vraagstuk 5: 10
Vraagstuk 6: 15
U krijgt 10 punten gratis.
Het eindcijfer wordt bepaald door het totale aantal punten door 10 te delen.

3